ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre, 1ª prova intercalar 07. 11. 17

1hora. (20 valores)

Nome:____**Turma:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	3a.(10)	4a.(15)	4c.(5)	
1b.(10)	2b.(5)	3b.(15)	4b.(15)		T:

Atenção:- todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.
- nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 15 pontos, uma resposta errada vale - 5 pontos

1. Sejam 4 caixas, cada uma com 10 bolas, de três tipos consoante o número de bolas pretas e brancas que contêm: 2 do tipo A, 1 do tipo B e 1 do tipo C. As caixas do tipo A tem 3 bolas pretas, as de tipo B tem 2 pretas e as de tipo C tem 5 pretas.

a) Se se selecionar aleatoriamente uma caixa e dessa se extrair uma bola preta, qual a probabilidade de ter sido extraída de uma caixa do tipo A?

A – caixa tipo A; B – caixa tipo B; C – caixa tipo C; BP – bola preta

$$P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{4};\ P(C)=\frac{1}{4};P(BP|A)=\frac{3}{10};\ P(BP|B)=\frac{2}{10};P(BP|C)=\frac{5}{10}$$

$$P(A|BP)=\frac{P(BP\cap A)}{P(BP)}=\frac{P(BP|A)*P(A)}{\underbrace{P(BP|A)*P(A)+P(BP|B)*P(B)+P(BP|C)*P(C)}_{Probabilidade\ total\ do\ acontecimento\ BP}}$$

$$P(A|BP)=\frac{0.3*0.5}{0.3*0.5+0.2*0.25+0.5*0.25}=0.4615$$

b) Se do conjunto das 40 bolas, se selecionarem, sem reposição, três bolas, qual a probabilidade de uma ser preta?

Como a tiragem é sem reposição trata-se de um problema cuja resolução passa pela aplicação do modelo hipergeométrico. Assim tem-se:

$$N=40, n=3, M=13, x=1\Rightarrow P(uma\ bola\ preta\ )=\frac{\binom{13}{1}*\binom{40-13}{3-1}}{\binom{40}{3}}=0.4618$$

2. Considere uma variável aleatória X cuja função distribuição é dada por:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x<0.5\\ 0.4x+0.2 & 0.5\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

a) Classifique a variável aleatória, **justificando.**

Existe um ponto de descontinuidade da função distribuição em $x = 0.5$. (1)

$P(X = 0.5) = F_X(0.5) - F_X(0.5^-) = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20} > 0$ (2). De (1) e (2) vem $D_X = \{0.5\} \neq \emptyset$

Como neste caso só existe um ponto de descontinuidade e $P(X = 0.5) < 1 \Rightarrow$ X é v.a. mista

b) Calcule $P(X>1\,|\,X>0.5)$.

$$P(X > 1|X > 0.5) = \frac{P(X > 1)}{P(X > 0.5)} = \frac{1 - F_X(1)}{1 - F_X(0.5)} = \frac{1 - 0.6}{1 - 0.4} = 0.666(7)$$

3. Seja a variável aleatória X e a função dada por $f(x)=2x^{-3},\ x>1$

a) Calcule $P(X>2)$ e obtenha a mediana de X.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \int_1^2 2x^{-3}\,dx = 1 - 2\frac{x^{-2}}{-2}\Big]_1^2 = \frac{1}{4}$$

Seja μ_e a mediana. Então $P(X\le\mu_e)=0.5$ logo $\int_2^{\mu_e} 2x^{-3}\,dx=0.5$ com $\mu_e>1$

Ora $\int_1^{\mu_e} 2x^{-3}\,dx = 2\frac{x^{-2}}{-2}\Big]_1^{\mu_e} = -\frac{1}{{\mu_e}^2} - (-1) = \frac{1}{{\mu_e}^2}$ e portanto $\mu_e=\sqrt{2}$ já que $\mu_e>1$.

b) Determine a função de distribuição da variável aleatória $Y=\begin{cases}1 & X\le 2\\ -1 & X>2\end{cases}$.

$$A_{-1} = \{x: y = -1\} = \{x: x > 2\} \Rightarrow f_Y(-1) = P(Y = -1) = P(X > 2) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \{x: y = 1\} = \{x: x \le 2\} \Rightarrow f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X \le 2) = F_X(2) = \frac{3}{4}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & y < -1\\ 1/4 & -1 \le y < 1\\ 1 & y \ge 1\end{cases}$$

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com função de probabilidade conjunta dada por

$y \quad \backslash \quad x$	1	2	3
0	0.15	0.20	0.05
1	0.10	0.05	0.10
2	0.10	0.15	0.10

a) Obtenha a função probabilidade marginal de X, $f_X(x)$. Calcule também $\mathrm{P}(X>2, Y\leq 1)$ e $P(X=2)$.

x:	1	2	3
$f_X(x) = \sum_{y\in D_Y} f_{XY}(x,y)$:	0.35	0.4	0.25

$P(X>2, Y\leq 1) = P(X=3, Y=0) + P(X=3, Y=1) = 0.15$; $P(X=2) = f_X(2) = 0.4$

b) Obtenha $E(X)$ e obtenha também $E(X\,|\,Y=2)$

$$E(X) = \sum_{x\in D_X} x * f_X(x) = \sum_{x=1}^{3} x * f_X(x) = 0.35 + 0.8 + 0.75 = 1.9$$

$$E(X|Y=2) = \sum_{x\in D_X} x * f_{X|Y=2}(x) = \sum_{x=1}^{3} x * \frac{f_{X,Y}(x,2)}{f_Y(2)} = \sum_{x=1}^{3} x * \frac{f_{X,Y}(x,2)}{0.35} = 2$$

c) Da comparação dos valores obtidos para $E(X)$ e para $E(X\,|\,Y=2)$ será que se pode concluir algo sobre a independência entre estas variáveis? Justifique já que apenas se valorizará a justificação.

$E(X) \neq E(X|Y=2)$ o que indica que o valor esperado da v.a. X varia com o valor assumido pela v.a. Y, então as v.a. (s) X e Y não são independentes. Note-se que a condição $E(X) = E(X\,|\,Y=2)$ não é suficiente para provar a independência.